Tema 7: Espacios Vectoriales Topológicos

17 y 20 de mayo de 2010

Preliminares algebraicos

Notación

X espacio vectorial (sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$)

$\Lambda \subset \mathbb{K}$, $\alpha \in \mathbb{K}$, $A, B \subset X$, $x \in X$,

$$\Lambda A = \{\lambda a : \lambda \in \Lambda, a \in A\}, \quad \Lambda x = \{\lambda x : \lambda \in \Lambda\}, \quad \alpha A = \{\alpha a : a \in A\}$$

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}, \quad x + B = \{x + b : b \in B\}$$

Por ejemplo,

- A subespacio de $X \iff \mathbb{K}A + A \subset A$
- A convexo $\iff (1-\rho)A + \rho A \subset A \quad \forall \rho \in [0,1]$

Conjuntos absorbentes y equilibrados

- $A \subset X$ es absorbente cuando $X = \mathbb{R}^+ A$
- $B \subset X$ es equilibrado cuando $\mathbb{D}B = B$, donde $\mathbb{D} = \{\lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| \leqslant 1\}$
  Para $A \subset X$, $\mathbb{D}A$ es la envolvente equilibrada de A

Concepto de Espacio Vectorial Topológico

Definición

Topología Vectorial:

Topología en un espacio vectorial X que hace continuas

- La suma: $X \times X \to X, \quad (x,y) \mapsto x+y \quad (x,y \in X)$
- El producto por escalares: $\mathbb{K} \times X \to X, \quad (\lambda, x) \mapsto \lambda x \quad (\lambda \in \mathbb{K}, x \in X)$

La topología trivial es vectorial, la discreta no (salvo $X = \{0\}$)
EVT $=$ espacio vectorial dotado de una topología vectorial

Propiedad inmediata: homogeneidad

X EVT, $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ con $\lambda_0 \neq 0$ y $x_0 \in X$. La aplicación $x \mapsto \lambda_0 x + x_0$ es un homeomorfismo de X.
Las traslaciones, giros y homotecias son homeomorfismos

$$\mathcal{B} \text{ base de entornos de cero en } X$$
$$\Downarrow$$
$$\{x+B : B \in \mathcal{B}\} \text{ base de entornos de cada } x \in X$$

La topología de X queda determinada por $\mathcal{B}$
¿Cómo son las bases de entornos de cero para una topología vectorial?

Construcción de topologías vectoriales

Entornos de cero

X EVT, $\mathcal{U} = \{$ entornos de cero en $X\}$

- $U \in \mathcal{U} \Rightarrow X = \mathbb{R}^+ U$. Todo entorno de cero es absorbente
- $U \in \mathcal{U} \Rightarrow \exists V \in \mathcal{U} : \mathbb{D}V = V \subset U$. Todo entorno de cero contiene un entorno de cero equilibrado
- $U \in \mathcal{U} \Rightarrow \exists V \in \mathcal{U} : V + V \subset U$

Definición constructiva de EVT

X espacio vectorial, $\mathcal{B}$ familia de subconjuntos de X verificando:

(a) $\forall U, V \in \mathcal{B} \;\; \exists W \in \mathcal{B} : W \subset U \cap V$

(b) $U \in \mathcal{B} \implies U$ absorbente

(c) $U \in \mathcal{B} \implies U$ equilibrado

(d) $\forall U \in \mathcal{B} \;\; \exists V \in \mathcal{B} : V + V \subset U$

Entonces existe una (única) topología vectorial en X para la cual $\mathcal{B}$ es base de entornos de cero

Uso de la definición constructiva

Pseudonormas

X espacio vectorial, $\nu : X \to \mathbb{R}$ pseudonorma cuando:

$$(1)\ \ \nu(x+y) \leqslant \nu(x) + \nu(y) \quad \forall x,y \in X$$

$$(2)\ \ \lambda \in \mathbb{D} \implies \nu(\lambda x) \leqslant \nu(x) \quad \forall x \in X$$

$$(3)\ \ \lim_{n\to\infty} \nu\left(\frac{x}{n}\right) = 0 \quad \forall x \in X.$$

Una seminorma verifica (1) y $\nu(\lambda x) = |\lambda|\nu(x) \ \ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \ \forall x \in X$, luego toda seminorma es una pseudonorma

Topología asociada a una pseudonorma

X espacio vectorial, ν pseudonorma en X,

$$U_\varepsilon = \{x \in X : \nu(x) \leqslant \varepsilon\}$$

La familia $\{U_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$ es base de entornos de cero para una (única) topología vectorial en X, la topología asociada a la pseudonorma ν, con la que X es un EVT pseudonormable (seminormable cuando ν es una seminorma)

Definiendo $\delta(x,y) = \nu(x-y)$ para $x,y \in X$, se obtiene una semidistancia que genera la misma topología.

$$\text{Seminormable} \implies \text{Pseudonormable} \implies \text{Semimetrizable}$$

Uso de los entornos de cero

X EVT, $\mathcal{B}$ base de entornos de cero,

- Cierre de un conjunto $A \subset X$:

$$\overline{A} = \bigcap_{U \in \mathcal{B}} A + U$$

- $\{\overline{U} : U \in \mathcal{B}\}$ base de entornos de cero cerrados
- X es un espacio topológico regular
- Los axiomas de separación $\mathbf{T}_0$, $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$ y $\mathbf{T}_3$ son equivalentes para X. EVT separado
- X separado $\iff$ $\{0\}$ cerrado
- Un espacio pseudonormable es separado cuando su pseudonorma ν es total: $x \in X,\ \nu(x) = 0 \implies x = 0$

$$\text{seminorma total} \ = \ \text{norma}$$

Continuidad uniforme

X,Y EVT, $A \subset X$, $f : A \to Y$

f es uniformemente continua (en A) cuando para cada V entorno de 0 en Y existe un U, entorno de 0 en X, tal que:

$$a,b \in A,\ a-b \in U \quad \Rightarrow \quad f(a)-f(b) \in V$$

Coherente en caso de que X e Y sean pseudonormables

Continuidad de operadores lineales

X,Y EVT, $T : X \to Y$ operador lineal. Equivalen:

(i) T es uniformemente continuo en X

(ii) T es continuo en X

(iii) T es continuo en 0

$L(X,Y)$ operadores lineales continuos

Redes

- Conjunto dirigido: $\Lambda \neq \emptyset$ con relación binaria $\leqslant$, reflexiva y transitiva (preorden) verificando:

$$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda \ \ \exists \lambda \in \Lambda : \lambda_1 \leqslant \lambda, \ \lambda_2 \leqslant \lambda$$

  Ejemplos: cualquier conjunto con una relación de orden total, $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$. Los entornos de un punto en un espacio topológico ordenados por "contención"

- Red en un conjunto X: Aplicación $\varphi : \Lambda \to X$, con Λ dirigido. Notación: $x_\lambda = \varphi(\lambda)$, $\varphi \equiv \{x_\lambda\}$. Ejemplo: sucesión

- Red convergente: X espacio topológico, $\{x_\lambda\}$ red en X, $x \in X$:

$$\{x_\lambda\} \to x \iff \forall U \in \mathcal{U}(x) \ \ \exists \lambda_0 \in \Lambda : \{x_\lambda : \lambda_0 \leqslant \lambda\} \subset U$$

- Las redes convergentes caracterizan la topología:

$$x \in \overline{A} \iff \exists \{a_\lambda\} \ : \ a_\lambda \in A \ \ \forall \lambda \in \Lambda, \ \{a_\lambda\} \to x$$

- Ejemplo: En todo EVT, el cierre de un subespacio es un subespacio

Complitud

Red de Cauchy

- En un espacio métrico: $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \lambda_0 : \lambda_1, \lambda_2 \geqslant \lambda_0 \;\Rightarrow\; d\left(x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}\right) < \varepsilon$
- En un EVT: $\forall U \in \mathcal{U}(0) \;\; \exists \lambda_0 : \lambda_1, \lambda_2 \geqslant \lambda_0 \;\Rightarrow\; x_{\lambda_1} - x_{\lambda_2} \in U$

Conjuntos completos

X EVT, $E \subset X$. E completo cuando toda red de Cauchy en E converge a un punto de E.

Uso de la complitud

- E completo, $F = \overline{F} \cap E \;\;\Rightarrow\;\; F$ completo
- X separado, $X \supset E$ completo $\;\;\Rightarrow\;\; E = \overline{E}$
- Todo EVT se puede completar
- Extensión de funciones: X, Y EVT, Y separado y completo, $M \subset X$ subespacio denso, $T \in L(M, Y)$. Existe única extensión $\widetilde{T} \in L(X, Y)$. Por tanto $L(M, Y) \equiv L(X, Y)$

Precompacidad

Conjuntos precompactos

En un espacio métrico:

$$A \ \text{ precompacto } \iff \forall \varepsilon > 0, \quad A \subset \bigcup_{k=1}^{n} B(x_k, \varepsilon)$$

En un EVT:

$$A \ \text{ precompacto } \iff \forall U \in \mathcal{U}(0), \ \exists F \ \text{ finito} : A \subset F + U$$

Propiedades de los conjuntos precompactos

- Uniones finitas, combinaciones lineales, envolventes equilibradas
- A precompacto $\implies \overline{A}$ precompacto
- A precompacto, f uniformemente continua $\implies f(A)$ precompacto

Caracterización de la compacidad

X EVT, $A \subset X$,

$$A \ \text{ compacto } \iff A \ \text{ precompacto y completo}$$

Por tanto, si X es completo,

$$A \ \text{ precompacto } \iff A \ \text{ relativamente compacto}$$

Conjuntos acotados

Definición de conjunto acotado

X EVT, $A \subset X$,

$$A \ \text{acotado} \iff \forall U \ \text{entorno de cero en } X, \ \exists \rho \in \mathbb{R}^+ : A \subset \rho U$$

Si X tiene la topología asociada a una pseudonorma ν:

$$A \ \text{acotado} \implies \sup\{\nu(a) : a \in A\} < \infty$$

El recíproco no es cierto en general, pero sí para seminormas

Propiedades de los conjuntos acotados

- Precompacto $\implies$ Acotado
- A acotado $\iff \left[\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \subset A \Rightarrow \left\{\frac{a_n}{n}\right\} \to 0\right]$
- Uniones finitas, combinaciones lineales, envolventes equilibradas
- A acotado $\implies \overline{A}$ acotado

Acotación de operadores lineales

X, Y EVT, $T : X \to Y$ lineal. Consideramos varias afirmaciones:

(a) T acotado en un entorno de cero:

$\exists U$ entorno de cero en X : $T(U)$ acotado en Y

(b) T continuo

(c) T secuencialmente continuo

(d) T acotado:

$$A \subset X,\ A \text{ acotado} \implies T(A) \text{ acotado en } Y$$

- Siempre: (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (d)
- En general, ninguna reversible
- Si X tiene un entorno de cero acotado, todas son equivalentes
- Si Y tiene un entorno de cero acotado, (b) $\Rightarrow$ (a)
- Si X es semimetrizable, (d) $\Rightarrow$ (b)

Topologías iniciales

Topología inicial

$X \neq \emptyset$, $\{(X_i, \mathcal{T}_i) : i \in I\}$ espacios topológicos, $f_i : X \to X_i$ $(i \in I)$.

Topología inicial para $\{f_i : i \in I\}$: Mínima que las hace a todas continuas

Hechos generales

- Base de la topología inicial:
$$\left\{ \bigcap_{i \in J} f_i^{-1}(G_i) \; : \; J \subset I, \; J \text{ finito}, \; G_i \in \mathcal{T}_i \; \forall i \in J \right\}$$
- Convergencia en la topología inicial:
$$\{x_\lambda\} \to x \iff \{f_i(x_\lambda)\} \to f_i(x) \; \forall i \in I$$
- Criterio de continuidad: Y espacio topológico, $f : Y \to X$,
$$f \text{ continua} \iff f_i \circ f \text{ continua} \quad \forall i \in I$$
- Ejemplos: inducida, producto, supremo
- Teorema de Tichonoff: Un producto arbitrario de espacios topológicos compactos es compacto

EVT con topología inicial

Topología inicial para aplicaciones lineales

- X espacio vectorial, $\{X_i : i \in I\}$ familia de EVT y para cada $i \in I$, $f_i : X \to X_i$ lineal. Entonces X con la topología inicial es un EVT.
- Base de entornos de cero en X:
$$\mathcal{B} = \left\{ \bigcap_{i \in J} f_i^{-1}(U_i) \ : \ J \subset I,\ J \text{ finito},\ U_i \in \mathcal{B}_i \ \forall i \in J \right\}$$
- Ejemplos: Subespacios, Producto de EVT, Supremo
- Separación: Si X_i es separado para todo $i \in I$,
$$X \quad \text{separado} \quad \iff \quad \bigcap_{i \in I} \ker f_i = \{0\}$$
- Acotación y Precompacidad: $A \subset X$,
$$A \begin{cases} \text{acotado} \\ \text{precompacto} \end{cases} \iff f_i(A) \begin{cases} \text{acotado} \\ \text{precompacto} \end{cases} \quad \forall i \in I$$
- Complitud: $\displaystyle\prod_{i \in I} X_i$ completo $\iff$ X_i completo $\forall i \in I$

Cociente de EVT

Topología cociente

X EVT, M subespacio vectorial de X, $\pi : X \to X/M$ aplicación cociente
Definición de la topología cociente: $G \subset X/M$,

$$G \text{ abierto} \iff \pi^{-1}(G) \text{ abierto en } X$$

Hechos básicos

- π es continua y abierta
- X/M es un EVT
- X/M separado $\iff \overline{M} = M$
- Y espacio topológico, $f : X/M \to Y$,

$$f \text{ continua} \iff f \circ \pi \text{ continua}$$

- Si X tiene la topología asociada a una pseudonorma ν, definiendo:

$$\widetilde{\nu}(x+M) = \text{ínf}\{\nu(x+m) : m \in M\},$$

  $\widetilde{\nu}$ es una pseudonorma en X/M que genera la topología cociente. Si ν es una seminorma, igual le ocurre a $\widetilde{\nu}$

Homomorfismos de EVT

Isomorfismo (de EVT)

X e Y EVT. Isomorfismo de X sobre Y: Operador lineal biyectivo $T : X \to Y$ tal que T y T^{-1} son continuos

Factorización canónica de un operador lineal

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \\ X/\ker T \arrow[r, "\widetilde{T}"] & T(X) \arrow[u, "I"'] \end{tikzcd}$$

Homomorfismo (de EVT)

X e Y EVT. Homomorfismo de X en Y: Operador lineal continuo $T : X \to Y$ tal que $T : X \to T(X)$ es una aplicación abierta

Inyectivo $\Rightarrow$ Monomorfismo; Sobreyectivo $\Rightarrow$ Epimorfismo

Todo homomorfismo (T) es composición de un epimorfismo (π), un isomorfismo $(\widetilde{T})$ y un monomorfismo (I)

Suma topológico-directa

Suma directa algebraica de dos subespacios

X espacio vectorial, Y subespacio de X. Complemento algebraico de Y en X: subespacio Z de X tal que $X = Y + Z$, $Y \cap Z = \{0\}$, es decir $X = Y \oplus Z$, suma directa

- $\Phi : Y \times Z \to X$, $\Phi(y,z) = y + z$ biyección lineal
- $\Phi^{-1}(x) = (Px, x - Px)$. $P : X \to X$ proyección lineal: $P^2 = P$, $P(X) = Y$, $\ker P = Z$
- $\Psi : Z \to X/Y$, $\Psi(z) = z + Y$ biyección lineal

Suma topológico-directa

X EVT, $X = Y \oplus Z$, Φ y Ψ siempre son continuas. Son equivalentes:

(1) Φ^{-1} es continua (Φ es un isomorfismo)

(2) P es continua

(3) Ψ^{-1} es continua (Ψ es un isomorfismo)

Suma topológico-directa

Subespacios complementados

Ejemplos sencillos

- X EVT separado, $X = Y \oplus Z$,
  suma topológico directa $\implies$ Y, Z cerrados
- X EVT, $X = \overline{\{0\}} \oplus Z$ suma topológico-directa
  Z EVT separado, isomorfo a $X/\overline{\{0\}}$

subespacio complementado

X EVT, Y subespacio de X

Y complementado: $\exists Z : X = Y \oplus Z$ suma topológico-directa

Equivalentemente: $\exists P : X \to X$ proyección lineal continua, $P(X) = Y$

$Z = \ker P$ complemento topológico de Y en X, isomorfo a X/Y

X EVT separado, Y subespacio complementado de X $\implies$ Y cerrado